

© Д.Е. ИГОШИН¹, Р.С. САБУРОВ²

¹Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН (Тюменский филиал)

^{1,2}Тюменский государственный университет
igoshinde@gmail.com

УДК 531/534

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ
ПРОНИЦАЕМОСТИ ОТ ПОРИСТОСТИ СРЕДЫ,
ОБРАЗОВАННОЙ КАНАЛАМИ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ**

**NUMERICAL RESEARCH OF PERMEABILITY DEPENDENCE
OF POROSITY IN THE MEDIA FORMED BY REGULAR STRUCTURE CHANNELS**

Рассмотрена пористая среда, каналы которой имеют сложную форму и образованы регулярными структурами. Предложен способ определения проницаемости такой среды с помощью прямого гидродинамического моделирования. Решая систему уравнений Навье–Стокса в объеме одной поры, находим расход флюида через нее. Далее, используя закон Дарси, определяем проницаемость пористой среды. Численная реализация проведена в связке из открытых пакетов: SALOME–OpenFOAM–Paraview. Геометрия порового пространства и расчетная сетка построены в пакете SALOME. Расчеты проведены в пакете OpenFOAM. Визуализация расчетов реализована в пакете Paraview. Верификация решателя проведена на тестовой задаче течения Пуазейля. Показано, что с уменьшением пористости и приближением ее к предельному значению проницаемость резко уменьшается. Получено хорошее соответствие между результатами расчетов и аналитической оценкой снизу для проницаемости.

A porous medium, whose channels have a complex shape and are formed by regular structures, is considered in the article. The authors present a method to determine the permeability of a medium by direct hydrodynamic modeling. The fluid rate is calculated by solving the system of Navier–Stokes equations in the amount of one pore. Then, with the help of Darcy's law, the permeability of the porous medium is determined. Numerical implementation is carried out in conjunction of open software packages: SALOME–OpenFOAM–Paraview. The geometry of the pore space and the computational mesh are designed with the help of SALOME software package. The calculations are performed with the OpenFOAM package. Visualization of calculations is implemented in the package Paraview. Verification of the solver is carried out on the test case of Poiseuille flow. The article shows that the degree of overlapping spheres permeability decreases rapidly with the reduction of porosity. A close agreement between the results of calculations and analytical lower estimator for the permeability is given in the article by Igoshin D.E., Nikonova O.A., Mostovoy P.Ya. which is the first quoted in the paper.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Фильтрация, пористая среда, проницаемость, вычислительная гидродинамика.

KEY WORDS. Filtration, porous media, permeability, computational fluid dynamics.

Пористые среды характеризуются несколькими параметрами: проницаемость, пористость, насыщенность флюидом, причем проницаемость горных пород может принимать широкий диапазон значений: от 10^{-12} м² до 10^{-16} м², что объясняется размерами пор и разнообразием их структуры [2]. Существуют подходы в моделировании пористой среды, которые можно реализовать регулярными упаковками сфер [3; 4] или случайными полями [5]. В [1] была предложена модель пористой среды, каналы которой образованы пространством между перекрывающимися сферами скелета, что позволяет, варьируя степень перекрытия, изменять пористость, не меняя существенно размер пор.

Уравнение Дарси, описывающее фильтрацию жидкостей и газов в пористой среде, исторически было получено экспериментально [6]. Но оно может быть получено с помощью некоторой процедуры осреднения по поровому объему из уравнения баланса импульса, описывающего движение жидкости на микроуровне [7]. При медленных (ползущих) течениях внутри пористой среды, для которых и справедливо уравнение Дарси, инерционные силы много меньше вязких сил. Поэтому ускорением, стоящим в левой части уравнения Навье-Стокса, можно пренебречь, что даст при осреднении ноль в левой части [8].

Основные уравнения. Рассмотрим каналную модель пористой среды, образованной регулярными структурами, описанными в [1]. Скелет считаем неподвижным и недеформируемым, жидкость несжимаемой. На рис. 1 изображены поры с элементами поверхности, соответствующие кубической и гексагональной структурам. Элементы поровых каналов кубической структуры вписаны в куб со стороной L , гексагональной — в треугольную призму со стороной L и высотой L .

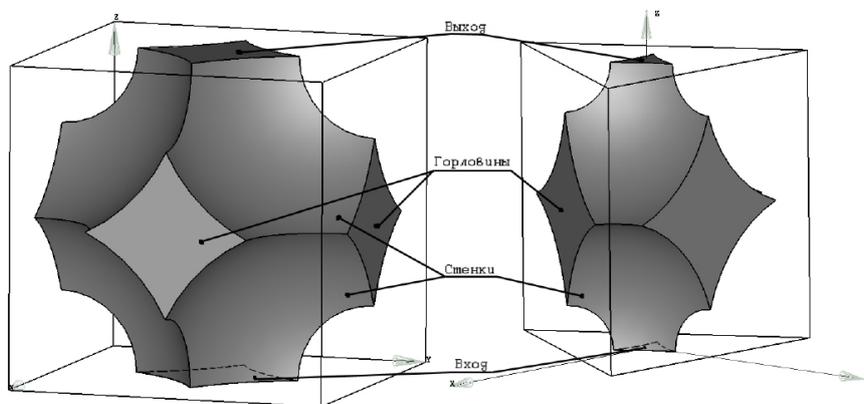


Рис. 1. Схемы пор

Для определения поля скоростей в канале необходимо решить систему уравнений Навье-Стокса в объеме одной поры:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

в стационарной постановке с граничными условиями, соответствующими отсутствию течения через горловины, прилипанию на стенках и заданному давлению на входе и выходе:

$$\begin{array}{ll}
 \text{вход} & \frac{d\vec{v}}{dn} = 0, p = p_1, \\
 \text{выход} & \frac{d\vec{v}}{dn} = 0, p = p_2, \\
 \text{стенки} & \vec{v} = 0, \\
 \text{горловины} & v_n = 0, \frac{dp}{dn} = 0.
 \end{array} \quad (2)$$

Объемный расход жидкости через поперечное сечение канала:

$$Q = \iint_{S_1} v_n ds, \quad (3)$$

где S_1 — площадь поперечного сечения канала.

Одномерная фильтрация флюида через пористую среду описывается уравнением Дарси:

$$u = \frac{k \Delta p}{\mu L}, \quad (4)$$

где $\Delta p = p_1 - p_2$ — перепад давления; L — толщина среды. По определению скорость фильтрации:

$$u = \frac{Q}{S}, \quad (5)$$

где Q — объемный расход флюида через поперечное сечение среды площадью S . Из системы (4) — (5) проницаемость:

$$k = \frac{\mu L Q}{S \Delta p}. \quad (6)$$

С учетом геометрии рассмотренных каналов выражение (6) для кубической структуры примет вид:

$$S = L^2, k = \frac{\mu Q}{L \Delta p}, \quad (7)$$

для гексагональной:

$$S = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}, k = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\mu Q}{L \Delta p}. \quad (8)$$

Подставляя (3) в (7) и (8), определим проницаемость пористой среды.

Численная реализация. В гидродинамическом моделировании активно используется программное обеспечение с открытым исходным кодом. В работе использовалась связка из открытых пакетов: SALOME-OpenFOAM-Paraview. Геометрия порового пространства и расчетная сетка были построены в пакете SALOME. Использовался сеточный алгоритм Tetraedron (Netgen). Количество элементарных объемов в поре 50-100 тысяч. Пакет OpenFOAM является средой программирования для задач механики сплошной среды. Он позволяет исполь-

зовать как неструктурированные, так и структурированные сетки. Расчеты проводились с использованием алгоритма SIMPLE (simpleFoam). При численном решении системы уравнений Навье-Стокса использована следующая конечно-разностная аппроксимация: для градиента давления — линейная схема Гаусса второго порядка, для дивергенции — схема Гаусса с ограничителем SuperBeeV, для лапласиана — консервативная линейная схема Гаусса второго порядка с коррекцией. Линейный контроль решения по давлению проводился с помощью алгоритма DCG. В алгоритме SIMPLE использован один неортогональный корректор.

Анализ результатов. Была проведена верификация решателя на тестовой задаче течения флюида в цилиндрическом канале (течение Пуазейля). Основные параметры те же, что и для основной задачи: плотность флюида $\rho=1000$ кг/м³, динамическая вязкость $\mu=10^{-3}$ Па·с, длина канала $L=10^{-5}$ м, перепад давления на входе и выходе $\Delta p=10^{-3}$ Па. Радиус канала принят $R=0.2L$. На рис. 2 элементарные объемы имеют форму гексаэдров (а) и тетраэдров (б).

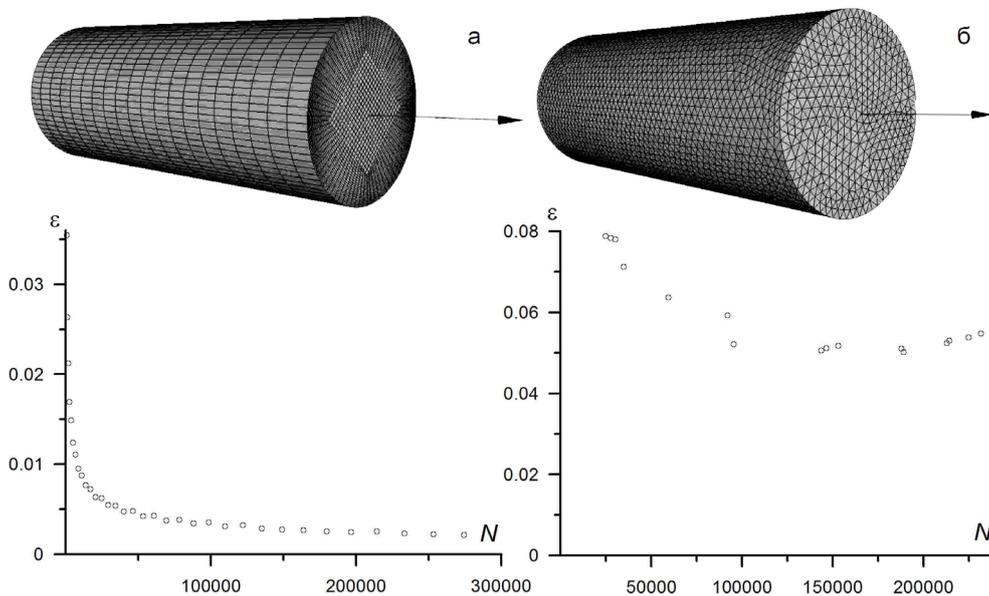


Рис. 2. Типы расчетных сеток и погрешность вычислений в зависимости от числа элементарных объемов для тестовой задачи (течение Пуазейля)

На расчетной сетке с элементарными объемами в форме гексаэдров удалось снизить относительную погрешность до $\varepsilon=0,2\%$ при числе объемов $N \sim 3 \cdot 10^5$. На расчетной сетке с элементарными объемами в форме тетраэдров относительная погрешность принимала значения в интервале 5-8%, устойчиво располагаясь у нижней границы при $N > 10^5$.

В силу сложной формы отдельной поры в рассмотренной модели построение структурированной сетки является трудоемкой задачей. Поэтому были использованы неструктурированные сетки с элементарными объемами в форме тетраэдров, что дает заведомо меньшую точность решения.

В табл. 1 приведены основные характеристики модельной пористой среды, рассмотренной в [1]. Отметим, что α — безразмерный параметр, α^* — его предельное значение, соответствующее замкнутым порам.

Таблица 1

Пористость					
Структура	Параметры		Пористость		
	S	α_*	Аналитическое выражение	$m(0)$	$m(\alpha_*)$
Кубическая	L^2	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,2929$	$1 - \frac{\pi[2 - 3\alpha^2(3 - \alpha)]}{12(1 - \alpha)^3}$	$1 - \frac{\pi}{6} \approx 0,4764$	0,0349
Гексагональная	$\frac{\sqrt{3}}{4} L^2$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,134$	$1 - \frac{\pi[1 - 2\alpha^2(3 - \alpha)]}{3\sqrt{3}(1 - \alpha)^3}$	$1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,3954$	0,1649

На рис. 3 приведена зависимость проницаемости от модельного параметра α (верхний ряд) и от пористости среды (нижний ряд) для кубической (а) и гексагональной (б) структур.

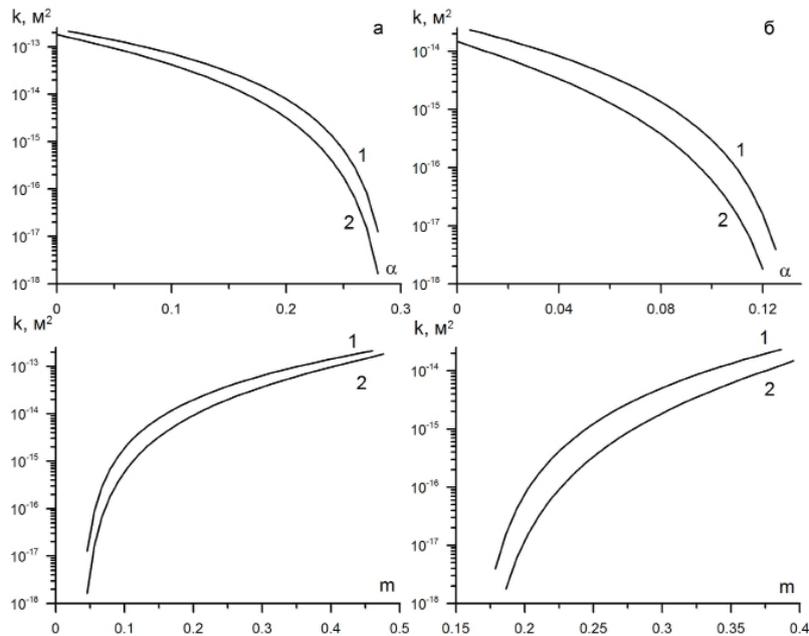


Рис. 3. Зависимость проницаемости от модельного параметра α и от пористости m

Линия 1 соответствует численному решению, линия 2 — оценке снизу из [1]. Из рисунка видно, что с увеличением α и приближением его к предельному значению α^* проницаемость пористой среды резко снижается. Это объясняется

тем, что поры слабо сообщаются друг с другом и при $\alpha = \alpha^*$ становятся замкнутыми. В материалах с низкой проницаемостью или в трещиноватых твердых телах вероятно проявление свойств перколяционного типа. Эксперименты на песчаниках с низкой пористостью [9] и на сильно спеченных стеклянных гранулах [10] показывают резкое падение проницаемости вблизи значения пористости в несколько процентов. Значение проницаемости, определенное численно, хорошо повторяет поведение аналитической оценки снизу, оставаясь, как и ожидалось, несколько выше ее.

Выводы. Показано, что с уменьшением пористости и приближением ее к предельному значению проницаемость резко уменьшается, что согласуется с известными экспериментами. Получено хорошее соответствие между результатами расчетов и аналитической оценкой снизу для проницаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игошин Д.Е., Никонова О.А., Мостовой П.Я. Моделирование пористой среды регулярными упаковками пересекающихся сфер // Вестник Тюменского государственного университета. Серия «Физико-математические науки. Информатика». 2014. № 7. С. 34-42.
2. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985. 240 с.
3. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: Гос. изд-во технико-технической литературы, 1947. С. 11-24.
4. Хейфец Л.И., Неймарк А.В. Многофазные процессы в пористых средах. М.: Химия, 1982. С. 29-33.
5. Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
6. Darcy, H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes a suivre et des formules a employer dans les questions de distribution d'eau... Paris: V. Dalmont, 1856. 647 с.
7. Басниев К.С., Кочина Н.И., Максимов М.В. Подземная гидромеханика: учебник для вузов. М.: Недра, 1993. 416 с.
8. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации: учеб. пособие. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. 88 с.
9. Bourbie, T., Coussy, O., Zinszner, B. Acoistique des Milieux Poreux. Chap. 1. Paris: Technip, 1986.
10. Wong, P.Z., Koplik, J., Tomanic, J.P. // Phys. Rev. Ser. B. 1984. Vol. 30. P. 6606.
11. Guoyn, E., Oger, L., Fiona, T.J. // J. Phys. Ser. D. 1987. Vol. 20. P. 1637.

REFERENCES

1. Igoshin, D.E., Nikonova, O.A., Mostovoy, P.Ya. Simulation of the porous medium by regular packages of intersecting spheres // Tyumen State University Herald. 2014. № 7. Pp. 34-42. (in Russian).
2. Romm, E.S. Structural models of porous medium of earth materials. Saint-Petersburg: Nedra, 1985. 240 p. (in Russian).
3. Leibenson, L.S. The flow of natural liquids and gases through porous medium. Moscow, 1947. Pp. 11-24. (in Russian).
4. Heifets, L.I., Neimark, A.V. Multiphase processes in porous medium. Moscow: Himiya, 1982. Pp. 29-33. (in Russian).

5. Schwindler, M.I. Statistical hydromechanics of porous medium. Moscow: Nedra, 1985. 288 p. (in Russian).
6. Darcy Henry Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes a suivre et des formules a employer dans les questions de distribution d'eau... Paris: V. Dalmont, 1856. 647 p.
7. Basniev, K.S., Kochina N.I. Underground fluid mechanics. Moscow: Nedra, 1993. 416 p. (in Russian).
8. Leontyev, N.E. Filtration fundamentals. Moscow: MSU, 2009. 88 p. (in Russian).
9. Bourbie, T., Coussy, O., Zinszner, B. Acoistique des Milieux Poreux. Chap. 1. Paris: Technip, 1986.
10. Wong, P.Z., Koplik, J., Tomanic, J.P. // Phys. Rev. Ser. B. 1984. Vol. 30. P. 6606.
11. Guoyn, E., Oger, L., Fiona, T.J. // J. Phys. Ser. D. 1987. Vol. 20. P. 1637.

Авторы публикации

Игошин Дмитрий Евгеньевич — научный сотрудник Тюменского филиала Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, доцент кафедры механики многофазных систем Физико-технического института Тюменского государственного университета, кандидат физико-математических наук

Сабуров Роман Сергеевич — магистрант Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета

Authors of the publication

Dmitry E. Igoshin — Cand. Phys. and Math. Sci., Research Associate, Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of The Russian Academy of Sciences

Roman S. Saburov — Master's Degree Student, Institute of Mathematics and Computer Science, Tyumen State University